問題7　力学（100点）

以下の問い（問1〜問4）に答えよ。

問1　質点Pの x，y 座標が時間 t の関数として $x=a\cos(\omega t)$，$y=b\sin(\omega t)$ で与えられる時，加速度は $(x, y)=(0, 0)$ を向くことを示せ。ただし，a，b，ω は正の定数とする。

問2　あるバネ定数を持ったバネに質量 m のおもりをつけ，おもりを手で支えながら下げていって静かにはなす時，バネは a だけ伸びてつりあった。この状態からさらに b だけ引き伸ばして静かにはなした時，おもりはどんな運動をするか。微分方程式を解くことにより解答せよ。その際，a だけ伸びてつりあった状態のおもりの位置を $x=0$ として，鉛直下方を x 軸の正の向きにとり，重力加速度の大きさは g とする。

問3　質量 M，半径 a の円板の，円板の中心を通り円板に垂直な軸の周りの慣性モーメントを求めよ。ただし，円板内の単位面積あたりの質量は一定とする。

問4　太陽の質量を M，惑星の質量を m とし，万有引力による惑星の運動を調べよう。万有引力は中心力で惑星の運動は一平面内に限られるので，太陽を原点に固定し極座標 (r, θ) を用いる。万有引力による位置エネルギーを $U=-G\dfrac{Mm}{r}$ として，以下の設問(a)〜(d)に答えよ。G は万有引力定数である。ただし，$M>>m$ とし，太陽は動かないとする。

(a) 力学的エネルギーを E として、この運動に伴う力学的エネルギー保存の法則は

$$\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]-G\frac{Mm}{r}=E \qquad (1)$$

で与えられることを示せ。

(b) 角運動量は保存されることを示せ。

（次ページに続く）