

問題9 物理数学 (100点)

以下の問い(問1, 問2)に答えよ。解答はいずれも答に至る過程を明記すること。

問1 フーリエ変換に関する以下の問い(1)~(4)に答えよ。

(1) x の関数 $g(x)$ のフーリエ変換 $G(f)$ は

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i2\pi f x} dx$$

と書ける。ここで f , i , π はそれぞれ周波数, 虚数単位, 円周率である。このときフーリエ逆変換の式はどのように書けるか。

(2) $g(0) = 1$ のとき,

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(f) df = 1$$

となることを示せ。

(3) 次の関数

$$g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq x_0, \\ 0, & |x| > x_0 \end{cases}$$

をフーリエ変換するとき,

$$G(f) = 2x_0 \frac{\sin(2\pi f x_0)}{2\pi f x_0}$$

となることを証明せよ。ただし $x_0 > 0$ とする。

(4) 定積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

を求めよ。

(次ページに続く)