

問題9 物理数学 (100点)

以下の問い(問1～問5)に答えよ。解答用紙には計算の途中経過も書くこと。

問1 2つの複素数 $z_1(=x_1+iy_1)$, $z_2(=x_2+iy_2)$ に対し, 次の式(1), (2)が成り立つことを示せ。ただし, i は虚数単位, x_1, x_2, y_1, y_2 は実数とする。

$$(1) \quad 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$$

$$(2) \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

問2 3次元直交直線座標系 (x, y, z) のベクトル関数 $\mathbf{A}=(A_x, A_y, A_z)$ に関して, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$ を計算せよ。

問3 次の連立方程式が $x=y=z=0$ 以外の解を持つときの α をすべて求めよ。また, そのときのいずれか1つの α に対して, 解の例を一組のみ記せ。

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = \alpha x \\ 4x + 3y + 2z = \alpha y \\ x + y + z = \alpha z \end{cases}$$

問4 以下の(1), (2)の常微分方程式の解を, それぞれの境界条件の下で求めよ。

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 0 \quad \text{境界条件は, } t=0 \text{ で, } x=0, \frac{dx}{dt}=4$$

$$(2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0 \quad \text{境界条件は, } t=0 \text{ で, } x=2, \frac{dx}{dt}=-2$$

問5 次の周期 2π の関数 $f(x)$ をフーリエ級数に展開せよ。

$$f(x) = |x| \quad (-\pi < x \leq \pi)$$